

# SIŁA GRAWITACJI

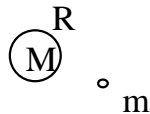
$$u_{\max} = c$$

$$F_N = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{gdy } r \text{ duże}$$

$$F_E = \frac{GMm}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GMm}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{gdy } r \text{ małe}$$

gdzie  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$   $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$

## II Prędkość kosmiczna



$$dL = F dr$$

$$L = \int dL = \int r \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_R^\infty = \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{mn_{II}^2}{2} = L = \frac{GMm}{R}$$

$$n_{II} = \left( \frac{2GM}{R_g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$n_{II} \leq c \quad c = \left( \frac{2GM}{R_g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_g = r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

promień horyzontu czarnej dziury

lub promień Schwarzschilda

Wartości liczbowe

$$r_g = 2.96 M/M_{\odot} \text{ [km]} \quad M_{\odot} = 1.9 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad \text{pc} = 3.08 \cdot 10^{18} \text{ cm}$$

elektron	$1.3542714 \cdot 10^{-55} \text{ cm}$		
proton	$2.4666 \cdot 10^{-52} \text{ cm}$		
neutron	$2.4900 \cdot 10^{-52} \text{ cm}$	proton o energii 1J	$2.4866 \cdot 10^{-41} \text{ cm}$
Ziemia	<b>0.886 cm</b>	Księżyc	0.01 cm
Słońce $M = M_{\odot}$	$2.96 \cdot 10^5 \text{ cm} \sim 3 \text{ km}$		
Droga Mleczna $M \rightarrow 10^{11} M_{\odot}$	$3 \cdot 10^{16} \text{ cm} \sim 0.01 \text{ pc}$		
	$M = 10^{22} M_{\odot}$		$3 \cdot 10^{27} \text{ cm} \sim 1000 \text{ Mpc}$

*Dla Słońca* ☉

$$M_{\odot} \sim 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g}$$

$$R_{\odot} = 6.9589 \cdot 10^{10} \text{ cm}$$

$$g_{\odot} = 2.739 \cdot 10^{11} \text{ cm s}^{-2}$$

I, II prędkość kosmiczna

$$\frac{GM_{\odot}m}{R_{\odot}^2} = \frac{mJ_I^2}{R_{\odot}}$$

$$J_I = \sqrt{G \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}}}$$

$$J_I = 7.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$J_{II} = \left( \frac{2GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_{II} = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \text{ dla Ziemi}$$

# CZARNE DZIURY

(black holes)

1969 - John Wheeler

1783 - John Michell prof. Cambridge  
i Markiz Laplace.

## SILA GRAWITACJI

$$F_N = \frac{G M m}{r^2} \quad \text{gdy } r \text{ duze}$$

$$F_E = \frac{GMm}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GMm}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{gdy } r \text{ male}$$

gdzie  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$   $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$

# CZARNE DZIURY

(black holes)

1969 - John Wheeler

1783 - John Michell prof. Cambridge i Markiz Laplace.

## JAK WYKRYĆ CZARNE DZIURY?

poprzez oddziaływanie grawitacyjne

Energia potencjalna dla chmury gazu o masie M skupionej do rozmiarów kuli o promieniu R

$$dE_p = -\frac{GM(r) \cdot dM(r)}{r} = -G \int_0^R \frac{4\pi r^3}{3} \cdot 4\pi r dr = -G \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot 4\pi \frac{1}{5} r^2 r \Big|_0^R = G \frac{4}{3} \pi R^3 r \frac{3}{5} =$$

bo

$$E_p = -\frac{GM^2}{R} \cdot \frac{3}{5}$$

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho$$

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$$

Energia grawitacyjna  $\longrightarrow$  termiczna  $\longrightarrow$  promieniowanie gamma + X

$$\text{Dla Słońca } E_p = 5.3 \cdot 10^{46} \text{ J}$$

# RÓWNANIE VIS VIVA

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{r} = E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$

$$u^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

dla  $a = r$

$$u^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow u = \sqrt{\frac{GM}{r}} = u_I$$

dla  $a = \infty$

$$u^2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = u_{II}$$

ZASTOSOWANIE:

dane:  $v$

szukane:  $a$

# LOTY RAKIET KOSMICZNYCH

$$F \cdot \Delta t = w \cdot dm \quad F = w \frac{dm}{dt} \quad m \frac{dJ}{dt} = -w \frac{dm}{dt} \quad dJ = -w \frac{dm}{m}$$

$$J = \int dJ = - \int w \frac{dm}{m} \quad J = -w \ln m + c$$

$M \rightarrow$  masa dla  $J = 0$

$$c = w \ln M$$

$$J = w \ln \frac{M}{m}$$

$$J_{II} = \left( \frac{2GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_{II} = 11,1 \frac{km}{s}$$

# TWIERDZENIE O WIRIALE

- określa nam uśrednioną w czasie energię kinetyczną zbioru cząstek związanych ze sobą siłami  $\frac{1}{r^2}$

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$$

$$F = \frac{c}{r^2} \quad E_p(r) = \frac{c}{r}$$

$$F = M \cdot \dot{V} \quad | \quad r$$

$$F \cdot r = M \cdot r \cdot \frac{c}{r^2} = E_p(r) \quad \text{Zauważymy, że}$$

$$M \frac{d}{dt}(r \cdot V) = M \cdot \dot{r} \cdot V + M \cdot r \cdot \dot{V} = MV\dot{r} + Mr\dot{V}$$

$$M \frac{d}{dt}(r \cdot V) = 2E_k + E_p$$

$$\frac{1}{2} M \frac{d}{dt}(rV) = E_k + \frac{1}{2} E_p$$

$$\frac{d(rJ)}{dt} = 0 \quad \text{dla układu związanego, gdyż obszar jest ograniczony zatem } rJ$$

też ograniczone.

Zatem

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

# UKŁAD PLANETARNY

Problem n - ciał

$$F = Ma$$

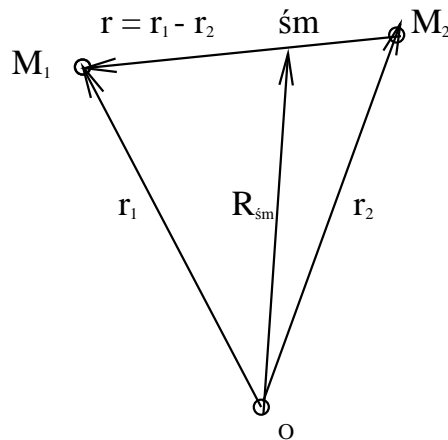
$$M_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = GM_i \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

$$r_{ij} \cong r_i - r_j$$

Warunki początkowe 6N  $\rightarrow$

3N współrzędne i 3N prędkości

**Problem 2 - ciał**



$$M_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = - \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$M_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$r = r_1 - r_2$$

$$M_1 \ddot{r}_1 + M_2 \ddot{r}_2 = 0 \quad \text{całkowane po } dt$$

$$M_1 \dot{r}_1 + M_2 \dot{r}_2 = \text{const.} \quad \text{-zasada zachowania pędu}$$

$$R_{cm} = \frac{M_1 r_1 + M_2 r_2}{M_1 + M_2}$$

$$\dot{R}_{cm} = \frac{M_1 \dot{r}_1 + M_2 \dot{r}_2}{M_1 + M_2} = \text{const.} \quad \text{- porusza się ze stałą prędkością}$$

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = - \frac{1}{M_1} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}_1 \quad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{1}{M_2} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}_2 \quad \text{odejmując}$$

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \quad \text{masa zredukowana}$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

$$r \times m \frac{d}{dt} (r \times \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} J_i = 0$$

Wyprowadzenie I prawa Keplera

$$m \frac{GM_1 M_2}{r^2} + m \mathbf{v}^2 r \quad \text{- dla skalara}$$



siła grawitacyjji    siła odśrodkowa

$$\textcircled{1} \quad m \frac{GM_1 M_2}{r^2} + m \mathbf{v}^2 r \quad (w, r - \text{funkcją czasu}) \quad \mathbf{v}^2 = \frac{J^2}{m^2 r^3}; \quad \text{bo}$$

$$J = r \times (m \mathbf{v} + w \mathbf{f}(r)) = m r^2 \omega \hat{z}$$

$$m \frac{GM_1 M_2}{r^2} + \frac{J^2}{m r^3} \quad (1) \quad r \text{ jest funkcją } t$$

Celem jest znalezienie  $r(\varphi)$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dj} \cdot \frac{dj}{dt} = \frac{dr}{dj} \omega = \frac{dr}{dj} \cdot \frac{J}{m r^2}$$

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{d^2 r}{dj} \left( \frac{J}{m r^2} \right) - \frac{2}{r^3} \frac{J}{m} \left( \frac{dr}{dj} \right)^2 \frac{J}{m r^2}$$

Wprowadzamy  $w(j) = \frac{1}{r(j)}$

$$\frac{dw}{dj} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dj}$$

$$\frac{d^2 w}{dj^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{dj^2} + \frac{2}{r^3} \left( \frac{dr}{dj} \right)^2$$

$$\text{Zatem } \frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{J}{m} \right)^2 \frac{d^2 w}{dj^2}$$

Wstawiając do (1)

$$-w^2 \frac{J^2}{m} \frac{d^2 w}{dj^2} = -w^2 G M_1 M_2 + \frac{w^3 J^2}{m} \quad \text{lub}$$

$$\frac{d^2 w}{dj^2} + w = \frac{mG M_1 M_2}{J^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s^e} (1 - e \cos j) \quad \text{równanie elipsy}$$

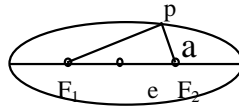
e - mimośród

e > 1 hiperbola

0 < e < 1 elipsa

e = 1 parabola

e = 0 koło



Zachowanie energii dla określenia parametrów elipsy

$$E = E_k + E_p = \frac{J^2}{2m} \left( \frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{G M_1 M_2}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{G M_1 M_2}{r}$$

$$\text{lub } \frac{J^2}{2m} \left( \frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{G M_1 M_2}{r_{\min}}$$

$$e = \left( 1 + \frac{2EJ^2}{mG^2 M_1^2 M_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E = -\frac{mG M_1^2 M_2^2}{2J^2} (1 - e^2)$$

Orbita zdeterminowana przez  $M_1, M_2, E, J$

II prawo Keplera

$$J r \times m \vec{u} = r \times m \left( \dot{r} \hat{r} + r \omega \hat{f} \right) = m r^2 \omega \hat{z} = \text{const}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \text{const}$$



### III prawo Keplera

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{2m}$$

$$S = \frac{JT}{2m} \quad \text{lub} \quad T = \frac{2Sm}{J} = \frac{2pabm}{J}$$

$$e = \frac{\text{odl. ogniska}}{a}$$

$$2a = \frac{2}{1-e^2} \cdot \frac{J^2}{GM_1 M_2 m}$$

$$T^2 = \frac{4p^2 a^2 b^2}{J^2}$$

$$J^2 = a(1-e^2)GM_1 M_2 m$$

$$T^2 = \frac{4p^2 ab^2 m}{GM_1 M_2 (1-e^2)}$$

$$b^2 = a(1-e^2)$$

$$T^2 = \frac{4p^2 a^3}{GM_1 M_2} = \frac{4p^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}$$

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4p^2}{G(M_1 + M_2)}$
---

dla układu słonecznego  $\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$



Nazwa	a [AU]	T Lat	e	i ° ' "	$\Omega$ ° ' "	$\omega$ ° ' "	R $\oplus=1$	M $\oplus=1$	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	g [cm/s <sup>2</sup> ]	Satelit y
<i>MERKURY</i>	0.387	0.240	0.2056	7 0 15	47 59 58	29 1 12	0.382	0.0558	5.420	0.387	0
<i>VENUS</i>	0.723	0.615	0.0068	3 23 40	76 25 40	54 44 5	0.949	0.8150	5.250	0.879	0
<i>ZIEMIA</i>	1.000	1.000	0.0167			101 13 15	1.000	1.0000	5.520	1.000	1
<i>MARS</i>	1.523	1.880	0.0934	1 51 0	49 20 30	286 12 7	0.532	0.1074	3.940	0.380	2
<i>JOWISZ</i>	5.202	11.862	0.0485	1 18 17	100 9 51	273 37 29	11.270	317.8930	1.314	2.339	16
<i>SATURN</i>	9.538	29.457	0.0556	2 29 22	3 26 3	339 39 41	9.420	95.1470	0.690	0.925	17
<i>URAN</i>	19.181	84.0139	0.0472	0 46 23	73 51 59	99 4 46	4.100	14.5400	1.190	0.794	5
<i>NEPTUN</i>	30.057	164.793	0.0086	1 46 22	29 5	247 45 12	3.880	17.2300	1.660	1.125	2
<i>PLUTON</i>	39.440	247.700	0.250	17 10 0	110 2 11	113 34 59	0.170	0.0017	0.6-1.7	0.440	1

## *PRAWA KEPLERA*

1. Wszystkie planety krążą po elipsach, w jednym z ognisk znajduje się Słońce.
2. Promień wodzący planety zakreśla w równych czasach równe pola.
3. Kwadraty okresów obiegu różnych planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi elips.

Masa planet = 447.8  $M_{\oplus}$  [ $M_{\oplus} = 5.979 \cdot 10^{27}$  g]

Masa księżycy = 0.12  $M_{\oplus}$

Masa komet + meteorytów =  $10^{-9}$   $M_{\oplus}$

Masa układu = 448.0  $M_{\oplus} = M_{\oplus}/743.3$

$J = 3.148 \cdot 10^{50}$  g/cm<sup>2</sup> s

$E_k = 1.99 \cdot 10^{42}$  erg całkowita kinetyczna

$E_c = 0.7 \cdot 10^{42}$  erg    obrotowa

